|  |  |
| --- | --- |
| Команда: | **Гимназия № 1 г. Воложина** |
| Задача № 8 | Функциональное уравнение |
| Автор: | Станкевич Елена |

**Резюме**

При исследовании данной задачи были решены функциональные уравнения, представленные в пунктах 1.1, 1.2, 1.3 исходной постановки задачи. Были найдены те значения параметров, при которых уравнения пунктов 2.1, 2.2 имеют решения, показаны те, при которых решений не имеется (и доказано, почему). Решено уравнение из пункта 2.1 для пункта 3.1 а).

Таким образом, полностью решены пункты 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2 задачи и подпункт а) пункта 3.1 для уравнений из 1.1, 1.2, 1.3, 2.1.

* 1. Ответ: не существует.
  2. Ответ:

**1.3.** Ответ:

Решение пунктов 1.1, 1.2, 1.3 следует из решения пункта 2.1. (в 1.1. *a = 1*, в 1.2. *a =* , в 1.3. *a =* ).

**2.1.** a) Ответ:

б) Ответ:.

в) Ответ: (−1; ) .

*Решение.*

Найдём такие *a,* что для любого *x* верно:

(1)

Заменим *x*на *–x:*

*.* (2)

Прибавим (1) к (2):

*.* (3)

Рассмотрим несколько случаев:

1. *a = 0.*

Тогда из (1) , что неверно для отрицательных *x*(а должно быть верно для любого *x*)*.*Следовательно, для *a = 0* решений нет.

1. *a <0.*

Из (3) получаем, что .

**Для**

.

Т.к.(в противном случае уравнение верно лишь для ), то

Зная, что , получаем (то есть для решений нет).

**Для**

;

;

.

Т.к. , , значит,, т.е.

(причём для каждого *x* знак определяется произвольно).

Из (3) получаем, что .

**Для**

Т.к. (в противном случае уравнение верно лишь для ), то

Зная, что , получаем (т.е. для решений нет).

**Для**

Т.к. , , то, , т.е. .

(причём для каждого *x* знак определяется произвольно).

***Обобщим:***

Уравнение не имеет решений при .

при .

при .

Заметим, что только одно решение имеется:

-при (тогда для , для );

-при .

В ходе непосредственной проверки утвердилась правильность всех найденных решений.

**2.2.**

*Решение.*

Найдём такие *a* и *b,* что для любого *x* верно:

(1\*)

Заменим *x* на *–x:*

*.* (2\*)

Прибавим (1) к (2):

*.* (3\*)

Рассмотрим несколько случаев:

1. *b = 0.*

Тогда из (1\*) . (4\*)

Подставим

. (5\*)

Сложив (4\*) и (5\*) получаем, что и (4\*) верно только для .

или

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. *a<0, b> 0* | , | |
| Из (3\*) получаем, что .  **Для**  .  Т.к.(в противном случае уравнение верно лишь для ), то  Зная, что , получаем (то есть для решений нет).  **Для**  ;  ;  . | | |
| Т.к. , , , значит, , т.е. | | Т.к. , , , значит, , что верно. | |
| (причём для каждого *x* знак определяется произвольно). | | |

или

|  |  |
| --- | --- |
| 1. *a<0, b< 0* | , |
| Из (3\*) получаем, что .  **Для**  .  Т.к.(в противном случае уравнение верно лишь для ), то  Зная, что , получаем (то есть для решений нет).  **Для**  ;  ;  . | |
| Т.к. , , , значит, , т.е. | Т.к. , , , значит, , т.е. |
| (причём для каждого *x* знак определяется произвольно). | |

***Обобщим:***

Уравнение не имеет решений при , и

при , .

при ; при .

при ; при .

Заметим, что только одно решение имеется:

-при (тогда для , для );

-при для , для).

В ходе непосредственной проверки утвердилась правильность всех найденных решений.

**3.1. a) для уравнения из 1.1**

Ответ: на симметричных промежутках D *f(x)= hj(x)*, где *hj(x)-* любая чётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неположительные значения или любая нечётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неположительные значения для .

**3.1. a) для уравнения из 1.2**

Ответ: на симметричных промежутках D или

**3.1. a) для уравнения из 1.3**

Ответ: на симметричных промежутках D или

Так как уравнения пунктов 1.1, 1.2, 1.3 – частные случаи 2.1 (в 1.1. *a = 1*, в 1.2. *a =* , в 1.3. *a =* ), приступим к решению общего случая.

**3.2. (подпункт а) п. 3.1 для уравнения из п. 2.1)**

*Решение.*

Решим функциональное уравнение:

(1)

Заменим *x* на *–x:*

(2)

Отнимем (1) от (2) и получим:

Рассмотрим несколько случаев:

***1)***

Из (1) получим:

Есть два возможных варианта:

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.*** *a = -1*  , *f(x) = h(x)*, где *h(x) -* любая чётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неотрицательные значения  **2.** *a ≠-1*  Зная, что , получим  или , . | ***1.*** *a = 1*  , *f(x) = h(x)*, где *h(x)–* любая чётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неположительные значения  **2.** *a ≠1*  Зная, что , получим  или . |

***2)*.**

В этом случае рассуждения проводятся аналогично предыдущему с небольшим изменением.

**Для**

Из (1) получим:

Есть два возможных варианта. Они описаны в предыдущем случае, только теперь функция является нечётной (на всякий случай приведены ниже).

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.*** *a = -1*  , *f(x) = h(x)*, где *h(x) –* любая нечётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неотрицательные значения для .  **2.** *a ≠-1*  Зная, что , получим  или , . | ***1.*** *a = 1*  , *f(x) = h(x)*, где *h(x) –* любая нечётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неположительные значения для .  **2.** *a ≠1*  Зная, что , получим  или . |

Учитывая факт, что функция нечётна, получаем её значение для .

***Обобщим:***

1. Пусть , где , (n выбирается произвольно). Разобьём область определения на пары симметричных промежутков (вроде и , (] и [), … , () и ()) и промежуток, включающий 0 (вроде или {0}). Тогда для всех значений , принадлежащих определённой паре из этих промежутков (или промежутку, включающему ноль) верно:

-при , *f(x) = hj(x)*, где *hj(x) -* любая чётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неотрицательные значения или любая нечётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неотрицательные значения для ,

-при, *f(x)= hj(x)*, где *hj(x)-* любая чётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неположительные значения или любая нечётная, определённая на всей числовой прямой и принимающая неположительные значения для ,

- при , или

2.

- при ,

- при ,

В ходе непосредственной проверки утвердилась правильность всех найденных решений.

*Приложение.*

Приложение включает в себя проверку некоторых найденных решений.

2.1.

Пусть .

|  |  |
| --- | --- |
| Для  ;  ;  . | Для  , ;  ;  ;  . |

Найденное решение удовлетворяет исходному уравнению.

3.1.

Пусть , . Решением является, например, функция

Проверим.

,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ;  . | ;  . | ;  . | ;  . |

Найденное решение удовлетворяет исходному уравнению.